УДК 539.3

Соловьев А. Н.
Еремеев В. А.
Вернигора Г. Д.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЕН

Композиционные материалы широко применяются в различных областях промышленности, это обуславливает интерес отечественных и зарубежных исследователей по изучению их эффективных свойств и характеристик конструкций и приборов с их использованием. Одним из путей получения новых свойств материалов является дизайн новых композиционных материалов, состоящих из нескольких фаз. Пористые материалы являются одним из видов композитов и проявляют в некоторых приложениях более высокие характеристики, чем сплошные (например, пористая пьезокерамика). Еще одним перспективным материалом для современного авиа- и машиностроения являются металлические пены. Поэтому проблемы получения, дизайна, моделирования пен и конструкций на их основе весьма актуальны в настоящее время. Одним из способов расчета конструкций содержащих композитные материалы является их замена некоторыми сплошными материалами с эффективными свойствами. Результаты исследования пен подытожены в ряде книг [1–8]. Здесь рассматривались как вопросы получения, так и построения различных моделей пен, рассматривались механические свойства, решались некоторые задачи, в частности, изгиба трехслойных панелей (сэндвичей) [1, 4]. Кратко отметим также последние результаты в области механики пористых материалов. В механике пен развиваются методы гомогенизации, приводящие микронеоднородный материал к однородному с некоторыми эффективными свойствами [9–14]. В [9, 10] рассмотрено построение дву- и трехмерных моделей пен при больших деформациях на основе метода осреднения. Построены конечно-элементные модели. Проведен анализ модели при растяжении и сжатии для одно- и многоосного напряженного состояний. Методы осреднения использованы [11] для панелей изготовленных из сотовых материалов. Численная реализация метода осреднения дана в [12] применительно к процессам роста в пенах, что важно для биологических приложений, а также для моделирования деградации, повреждаемости и других эволюционных процессов. Биомеханические аспекты пористых материалов обсуждались в [15], где в частности рассматривались природные конструкции типа сэндвич. Пены обладают размерным эффектом [16–20]. Он проявляется, например, во влиянии отношения размера образца к характерному размеру пор на напряженное состояние и разрушение. Его влияние на разрушение полимерных пен рассматривалось в [16]. Влияние размера отверстия в разных пенах на разрушение изучалось в [18].

Целью настоящей работы является методов определения эффективных характеристик пористых материалов (низко- пористых металлических пен) на основе аналитического решения ряда модельных задач для сплошных тел и конечно-элементного моделирования пористых материалов в комплексе «ACELAN». Для достижения этой цели разработано специальное программное обеспечение.

Рассмотрим низко- пористую металлическую пену, которую будем описывать в рамках линейной теории упругости [21]. При моделировании пористого материала, поры будем связывать с отдельными конечными элементами, модуль упругости в которых, на несколько порядков (описывается коэффициентом понижения свойств) ниже, чем в материале. При таком способе моделирования первым шагом расчетов является установление величины коэффициента понижения (обычно $10^{-4} - 10^{-5}$) и размера конечно-элементной сетки (зависит от выбранного представительного объема или конструкции), при которых на результаты расчета не влияют значение этого коэффициента и вида конечно-элементного разбиения. Различают два типа структур пен: открытые и закрытые ячейки. Для высокопористых пен с указанными структурными различиями в литературе известны следующие эмпирические формулы:

в случае открытых ячеек:

$$\frac{E_f}{E_s} = c \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right)^2 ; \tag{1}$$

в случае закрытых ячеек:

$$\frac{E_f}{E_s} = \Phi^2 \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right)^2 + (1 - \Phi) \frac{\rho_f}{\rho_s} , \tag{2}$$

где E_f – модуль Юнга пены; E_s – модуль Юнга материала; ρ_f – плотность пены; ρ_s – плотность материала; эмпирические коэффициенты $c \approx 1$; $\Phi = 0{,}6 - 0{,}8$.

Рассматривается применение и модификацию формулы (2) для пористого металлического материала с объемным процентным содержанием пор до 40 %. для случая пористого композита нерегулярной структуры. Положение пор считается случайным с равномерным распределением по объему материала. Конечно-элементное моделирование пористого композита проводится в специализированном комплексе «ACELAN», предназначенном для расчета пьезоэлектрических устройств, которые моделируются составными упругими, электроупругими и акустическими средами. Структура комплекса такова, что имеется возможность встраивать пользовательские «решатели». Реализованные в работе решатели позволяют моделировать нерегулярные композиты.

В качестве задачи имеющей аналитическое решение рассматривается цилиндрический изгиб пластины шарнирно опертой по двум противоположным сторонам, находящейся под действием равномерного давления, эта краевая задача описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$D \cdot \Delta^2 \varpi = Q ; \tag{3}$$

и граничными условиями:

$$\text{при } x = 0,\ \varpi = 0,\ M_x = 0; \qquad \text{при } x = l,\ \varpi = 0,\ M_x = 0, \tag{4}$$

где ϖ – прогиб балки; $D = \dfrac{E_f \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; Q – равномерно распределенная нагрузка; E_f – модуль Юнга пористого материала; h – толщина балки; μ – коэффициент Пуассона; $M_x = D \dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2}$ – момент.

Решение задачи в случае цилиндрического изгиба ищется в виде: $\varpi = \varpi(x)$ и имеет вид:

$$\varpi = -\frac{Q \cdot x \cdot (\mu^2 - 1)(x^3 - 2lx^2 + l^3)}{2 E_f h^3} . \tag{5}$$

Прогиб в центре пластины при $x = l/2$ имеет вид:

$$\varpi = -\frac{5}{13} \cdot \frac{Q \cdot (\mu^2 - 1) \cdot l^4}{E_f \cdot h^3} . \tag{6}$$

Соотношение (6) является разрешающим для нахождения эффективного модуля Юнга при заданном коэффициенте Пуассона. Для одновременного определения эффективных модуля Юнга и коэффициента Пуассона возможно рассмотреть задачу растяжения прямоугольной плиты при приложении равномерного напряжения к ее торцу.

Далее рассматривается задача об изгибе прямоугольной области (плоская деформация) с нерегулярным распределением пор, ее решение проводится в конечно-элементном комплексе «ACELAN» для двух материалов пористой пластины – алюминия и титана. При этом, $h = 10^{-1}$ м, $l = 1$ м, $Q = 1000$ Па, для алюминия $\mu = 0{,}3$, $E_e = 6.9 \cdot 10^{10}$ Па, для титана $\mu = 0{,}32$, $E_e = 11{,}2 \cdot 10^{10}$ Па. На рис. 1–2 представлены распределения пор в композите (окно визуализации композита в «ACELAN»), а на рис. 3 распределение компоненты вектора смещения при изгибе (окно постпроцессора «ACELAN»).

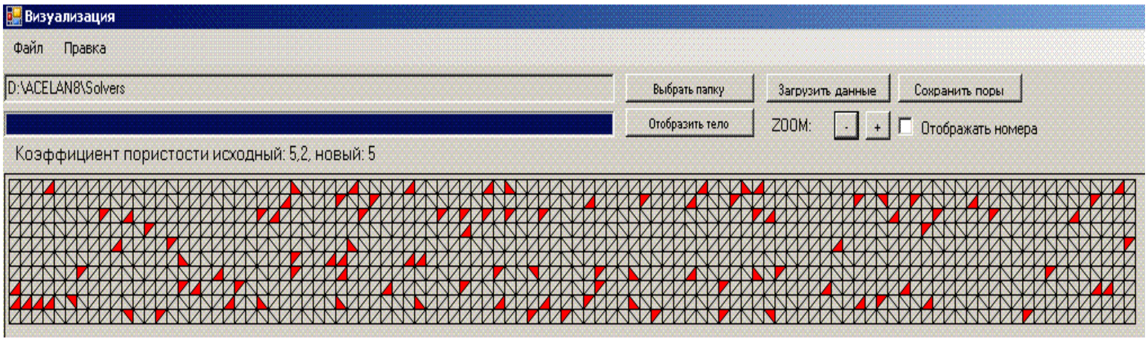

Рис. 1. Распределение пор в 5 % композите

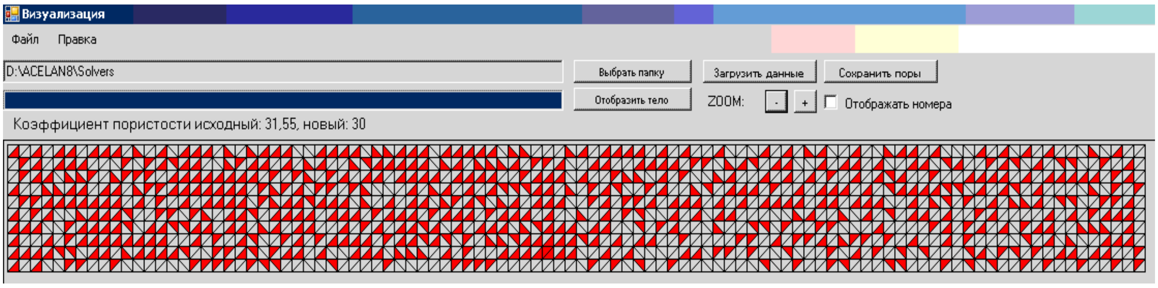

Рис. 2. Распределение пор в 5 % композите

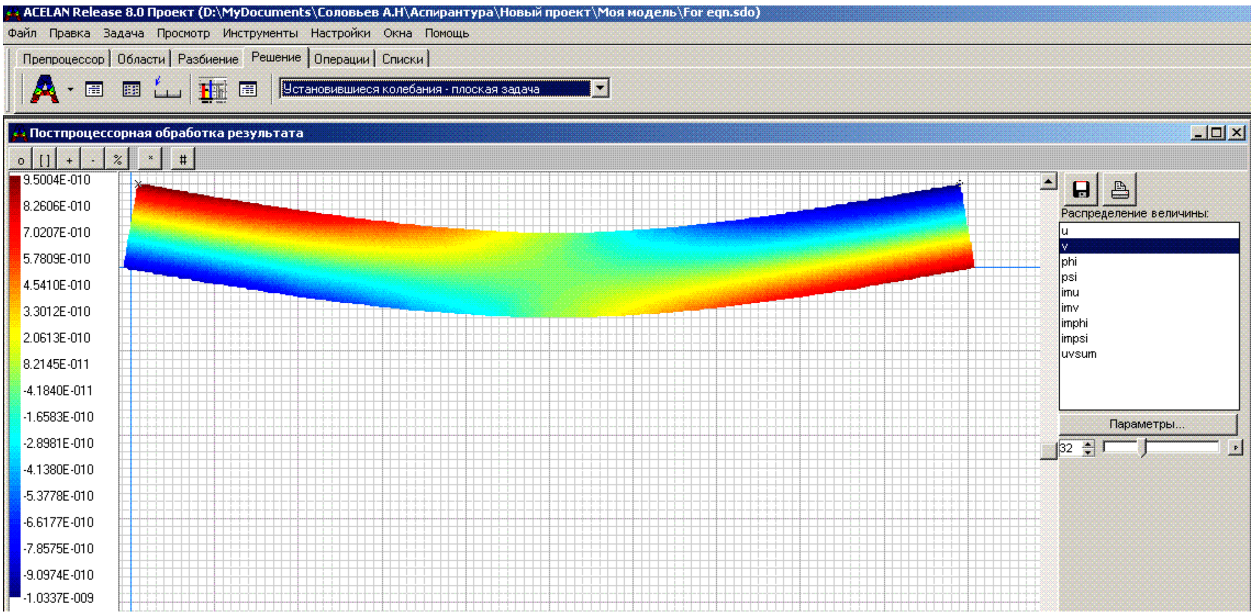

Рис. 3. Распределение горизонтального смещения на деформированном состоянии области

Результаты расчета соотношения E_f / E_s для различного процентного содержания пор на основе соотношения (6) и конечно-элементного расчета прогиба пластины представлены на рис. 4 (кривые 1 и 2 для алюминия и титана соответственно). Следует отметить, что в этой области соотношения (2) приводят к значительным погрешностям (кривые 3 и 4 на рис. 4 при $\Phi = 0{,}6$ и $\Phi = 0{,}8$).

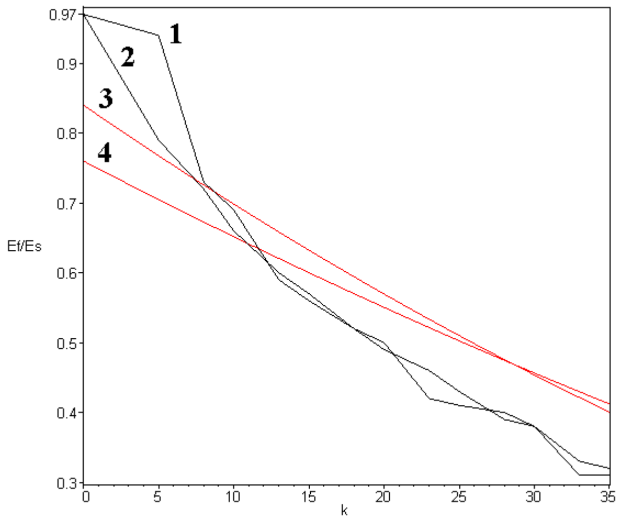

Рис. 4. Расчетные значения E_f / E_s и найденные по формуле (2)

Далее предполагается, что зависимость E_f / E_s от коэффициента пористости можно описать при помощи функции:

$$\frac{E_f}{E_s} = F\left(X(k)\right) = A \cdot X^3(k) + B \cdot X(k), \tag{7}$$

где $X(k) = 1 - \dfrac{k}{100}$; k – коэффициент пористости; A, B – коэффициенты многочлена, которые находятся при помощи метода наименьших квадратов.

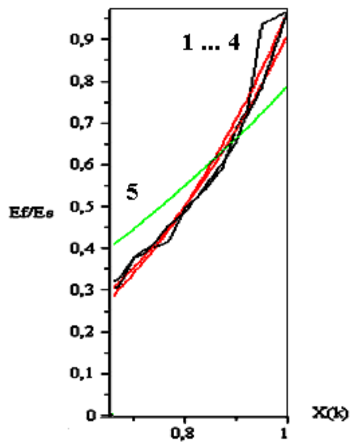

Рис. 5. Аппроксимация E_f / E_s кубическим многочленом (7)

На рис. 5 представлены расчетные зависимости и аппроксимированные по формуле (7) соотношения E_f / E_s (кривые 1…4) и вычисленные по формуле (2) при $\Phi = 0{,}7$.

ВЫВОДЫ

На основе сочетания аналитического решения задач о цилиндрическом изгибе пластин и конечно-элементным решением задач для пористых тел разработан метод определения эффективных характеристик пористого материала. Проведены численные эксперименты для низко-пористых металлических пен с объемным процентным содержанием пор до 40 % с их случайным равномерным распределением. На основе численных расчетов построены приближенные полиномиальные зависимости модуля Юнга от объемной доли металла.

Предложены способы определения эффективных модуля Юнга и коэффициента Пуассона на основе статической эквивалентности представительных объемов композита и сплошного материала.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 10-08-01296-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Metal Foams: a Design Guid / M. F. Ashby, A. G. Evans, N. A. Fleck, L J. Gibson, J. W. Hutchinson, H. N. G. Wadley. – Butterworth-Heinemann, Boston, 2000.*

2. *Metal Foams and Porous Metal Structures / J. Banhart, M. F. Ashby, N. A. Fleck (eds.) // Verlag MIT Publishing. – Bremen, 1999.*

3. *Handbook of Cellular Metals. Production, Processing, Applications / H. P. Degischer, B. Kriszt (eds.). – Wiley-VCH, Weinheim, 2002.*

4. *Gibson L. J. Cellular Solids : Structure and Properties / L. J. Gibson, M. F. Ashby. – 2 nd edition. – Cambridge Solid State Science Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.*

5. *Handbook of Polymeric Foams and Foam Technology / D. Klempner, V. Sendijarevic (eds.). – 2nd edition. – Hanser, Munich, 1992.*

6. *Handbook of Plastic Foams. Types, Properties, Manufactore and Applications / A. H. Landrock (ed.). – Noes Publications, Park Ridge, New Jersey, 1995.*

7. *Polymeric Foams. Mechanisms and Materials / S. Lee, N. Ramesh (eds.). – CRC Press, Boca Raton, 2004.*

8. *Mills N. Polymer Foams Handbook. Engineering and Biomechanics Applications and Design Guide / N. Mills. – Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 2007.*

9. *Demiray S. Strain-energy based homogenisation of two and three-dimensional hyperelastic solid foams / S. Demiray, W. Becker // J. Materials Science. – 2005. – № 40. – P. 5839–5844.*

10. *Demiray S. Analysis of two- and three-dimensional hyperelastic model foams under complex loading conditions / S. Demiray, W. Becker, J. Hohe // Mechanics of Materials. – 2006. – № 38. – P. 985–1000.*

11. *Hohe J. A direct homogenisation approach for determination of the stiffness matrix for microheterogeneous plates with application to sandwich panels / J. Hohe // Composites : Part B. – 2003. – № 34. – P. 615–626.*

12. *Laroussi M. Foam mechanics : nonlinear response of an elastic 3D-periodic microstructure / M. Laroussi, K. Sab, A. Alaoui // Int. J. Solids Struct. – 2002. – № 39. – P. 3599–3623.*

13. *Ebinger T. Numerical homogenization techniques applied to growth and remodelling phenomena / T. Ebinger, S. Diebels, H. Steeb // Comput. Mech. – 2007. – № 39. – P. 815–830.*

14. *Microstructure based model for permeability predictions of open-cell metallic foams via homogenization / G. Laschet, T. Kashko, S. Angel, J. Scheele, R. Nickel, W. Bleck, K. Bobzin // Materials Science and Engineering. – 2008. – A 472 (1–2). – P. 214–226.*

15. *Gibson L. Biomechanics of cellular solids / L. Gibson // J. Biomechanics. – 2005. – № 38. – P. 377–399.*

16. *Size effect and asymptotic matching analysis of fracture of closed-cell polymeric foam / Z. P. Bazant, Y. Zhou, G. Zi, I. M. Daniel // Int. J. Solids Struct. – 2003. – № 40. – P. 7197–7217.*

17. *Chen C. Size effects in the constrained deformation of metallic foams / C. Chen, N. Fleck // J. Mechanics Physics Solids. – 2002. – № 50. – P. 955–977.*

18. *The effect of hole size upon the strength of metallic and polymeric foams / N. Fleck, O. Olurin, C. Chen, M. Ashby // J. Mechanics Physics of Solids. – 2001. – № 49. – P. 2015–2030.*

19. *Kesler O. Size effects in metallic foam core sandwich beams / O. Kesler, L. Gibson // Materials Science and Engineering. – 2002. – A 326. – P. 228–234.*

20. *Tekoglu C. Size effects in the mechanical behavior of cellular materials / C. Tekoglu, P. R. Onck // J. Materials Science. – 2005. – № 40. – P. 5911–5917.*

21. *Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1981. – 520 с.*

Соловьев А. Н. – д-р физ.-мат. наук, проф. ДГТУ, ЮФУ, ЮНЦ РАН;
Еремеев В. А. – д-р физ.-мат. наук, проф. ЮНЦ РАН, ЮФУ;
Вернигора Г. Д. – сотрудник ДГТУ.

ДГТУ – Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Россия.
ЮФУ – Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия.
ЮНЦ РАН – Южный научный центр Российской академии наук, г. Ростов-на-Дону, Россия.

E-mail: soloviev@math.rsu.ru